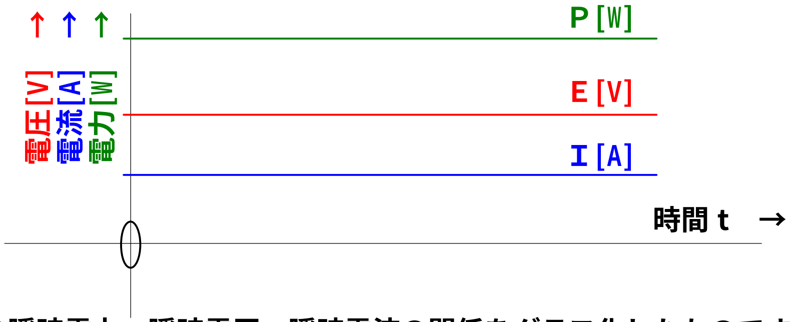
瞬時電力の話

皆様こんにちは
今回のお題は「瞬時電力」です。
交流の電力を求めるのに、ＥＩCOSθの計算をしますが、どうしてその様な計算になるのか？という話です。
この話は恐らく仕事には全く関係ない話だと思います。
まぁ知らないより知っていた方が良い程度でお読み下さい。

平成　鹿年　骨月　吉日
貧電工附属　埼玉ドズニーランド大学（ＳＤＵ）学長　鹿の骨

早速ですが下図をご覧下さい。

図１



上図は直流の場合の瞬時電力、瞬時電圧、瞬時電流の関係をグラフ化したものです。
直流ですから、瞬時電圧は時刻に関係なく常に一定です。従って流れる電流も一定となり、結果として瞬時電力も一定になります。
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流になります。
瞬時電力をＰ、瞬時電圧をＥ、瞬時電流をＩとおけば、Ｐ＝ＥＩ（＝一定）です。

今度は交流の場合です。
交流の電圧は、下図（図２）の様になっています。

図２

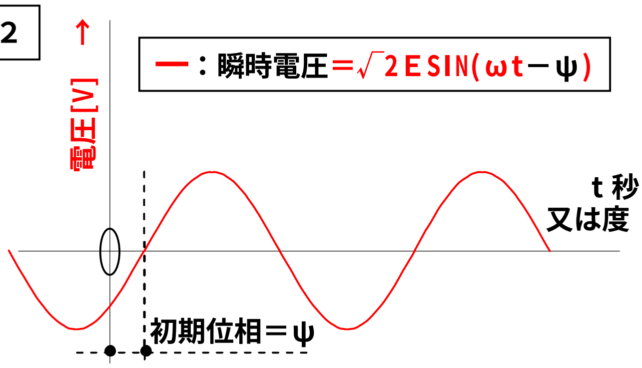
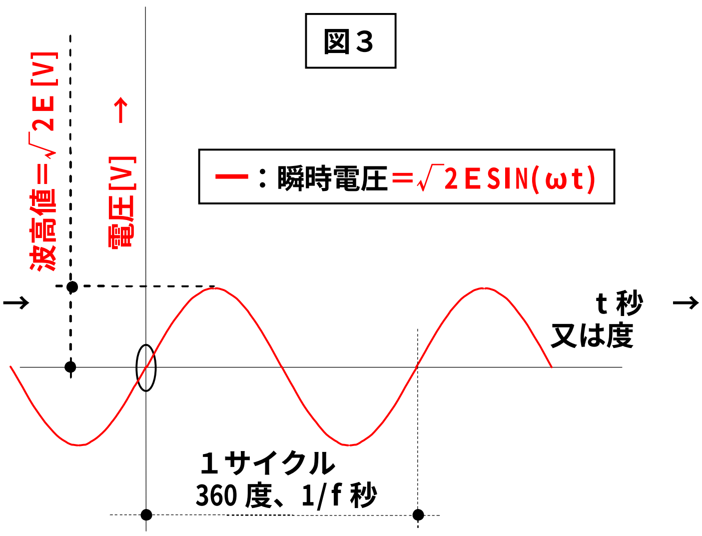


図３



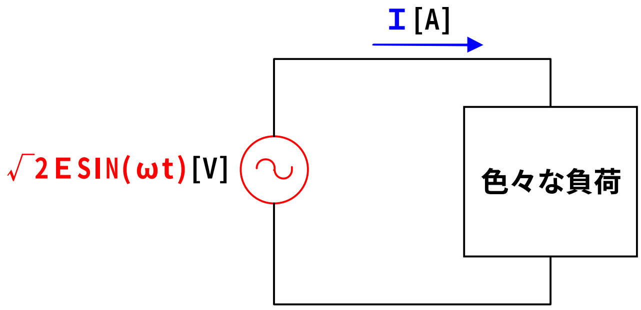
横軸に時間又は角度を取って、縦軸に電圧値[V]を取り、グラフ化すると図２の様になります。
この図は、グラフ上の原点つまり計り初めの時刻を適当に取ったものです。
適当な時刻から計り始めていますので、0[V]のポイントと原点が合いません。
この様に計り初めがずれているものの角度のズレを初期位相と言います。
現実的には確かにこうなるのですが、わざわざ難しく考える事も無いと思いますので、図３の様に頃合いを見計らって丁度0[V]になる時から計り始める事とします。
図３に示した通り、波高値を√２Ｅ[V]とすると、この赤の線で書かれた曲線は次のような時間の関数になります。

瞬時電圧＝√２ＥSIN(ωｔ)

ｆ[Hz]を周波数とした場合ω＝360ｆ[度/秒]の関係が有り、ωを角速度(又は角周波数)と言います。
50[Hz]ではω＝360×50＝18,000[度/秒]となります。
角度を表す場合、[度]以外に[rad：ラジアン]で示す方法もありますが、解りづらいので、どうしてもその様にしなければイケナイ場合が来るまで、角度は[度]で示します。
この様に、電圧はサイン関数になります。（コサイン関数で示しても良い。）
√２のオマケが付いているのは、後で説明します。

電圧の次は電流です。
直流と同様に、交流も電流が流れます。
下記の回路に流れる電流を観察して見ましょう。

図４



負荷は色々なものが有ります。
しかし、流れる電流は次のことが決まっています。
その１
瞬時電流も瞬時電圧と同様に時間ｔのSIN関数になる。
その２
瞬時電源電圧がｆ[Hz]の場合は瞬時電流もやはりｆ[Hz]になる。
（0.5f[Hz]になったり、2f[Hz]になったりはしない、と言う事。）
と言うことで、流れる電流の波高値を√２Ｉ[A]とすると、瞬時電流は下記の関数で書けます。
瞬時電流＝√２ＩSIN(ωt＋θ)
早い話が、サイン関数になると言うことです。
Ｉの値をどうやって求めるかは別の問題です。ここではＩは解っているとします。
θは、電圧とのズレを示します。（位相角と言う。プラスの値になったりマイナスの値になったりする。）
一番簡単なのは下図（図５）の様な場合です。（θ＝０）
つまり、瞬時電流＝√２ＩSIN(ωt)です。（電圧と電流が同相であると言う。）

図５

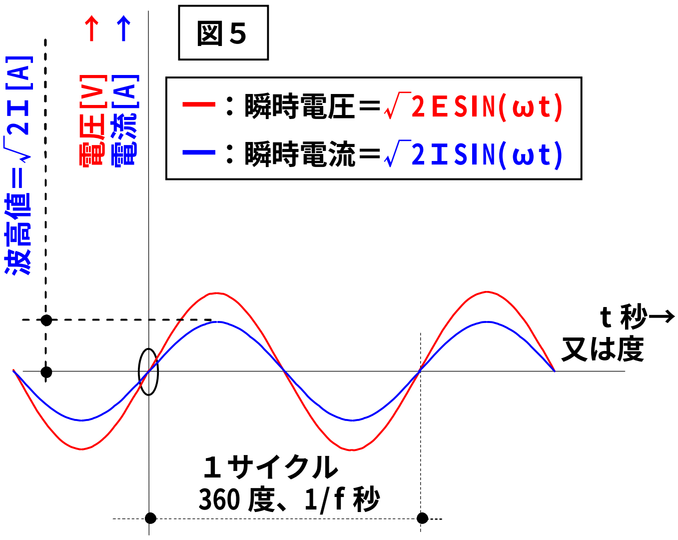


図６

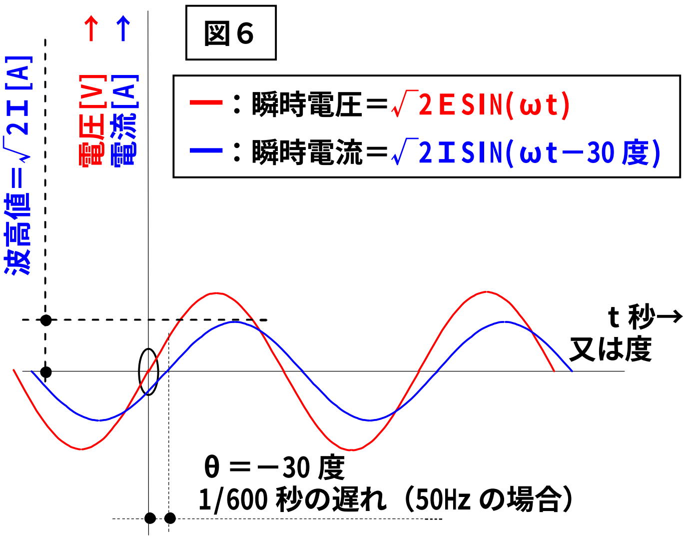


図６はθ＝－30度の場合を書いたものです。（θそのものが負値になっている事に注意！）
この場合、瞬時電圧が0[V]になる瞬間の時刻から1/600秒後に瞬時電流が0[A]になります。(50Hz時)
従って、この様な電流を電圧に対して遅れていると言います。(時間的に遅れているのでこの様に言う。)
遅れる度合いを示すのに、時間では無く、角度で示します。
この場合、｢30度の遅れ｣と言います。

瞬時電流＝√２ＩSIN(ωt－30度)　と書けます。

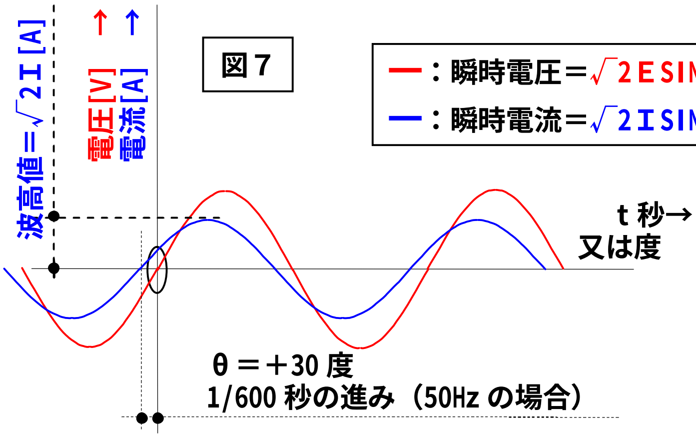
遅れがあれば進みがある。と言うことで、次ページに進みの場合を記載します。

鹿の骨印

進みの場合のグラフです。
電流が 30 度電圧に対して進んでいる場合を書いています。

図７

ー：瞬時電圧＝$\sqrt{2}$ＥSIN(ωt)
ー：瞬時電流＝$\sqrt{2}$ＩSIN(ωt＋30 度)



*****************　臨時のお知らせ　*****************
ここから先は三角関数の展開式が羅列されます。
式を変形する時に色々な三角関数の公式を使用します。
その都度説明を入れると説明が煩雑になりますので此処に使用する公式を一覧で書きます。
展開式の中ではどの公式を使用して展開したのかを番号で示しますので参照して下さい。

① $\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{SIN}\alpha+\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{COS}\alpha=1$

② $\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{COS}\beta=\frac{1}{2}\{\mathrm{COS}(\alpha+\beta)+\mathrm{COS}(\alpha-\beta)\}$

③ $\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{SIN}\alpha=1-\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{COS}\alpha=1-\frac{1}{2}\{\mathrm{COS}(\alpha+\alpha)+\mathrm{COS}(\alpha-\alpha)\}=\frac{1}{2}(1-\mathrm{COS}2\alpha)$

④ $\mathrm{SIN}(\alpha\pm\beta)=\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{COS}\beta\pm\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{SIN}\beta$

⑤ $\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{COS}\alpha=\frac{1}{2}\mathrm{SIN}(2\alpha)$　　←$\mathrm{SIN}(2\alpha)=2\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{COS}\alpha$

⑥ $\mathrm{COS}(\alpha\pm\beta)$＝＋の場合 $\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{COS}\beta-\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{SIN}\beta$、－の場合 $\mathrm{COS}\alpha\,\mathrm{COS}\beta+\mathrm{SIN}\alpha\,\mathrm{SIN}\beta$

*****************　臨時のお知らせは此処まで　*****************

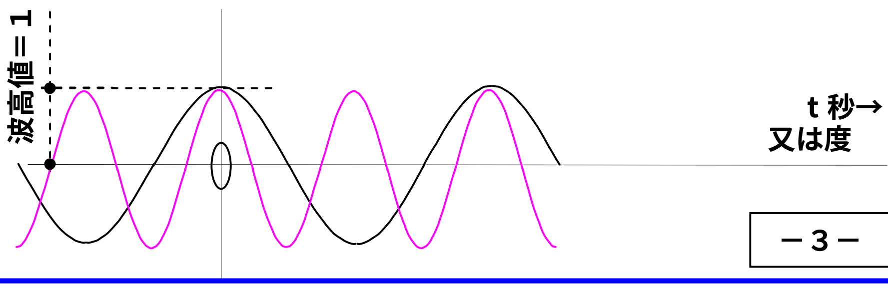
電圧、電流と来ましたので、今度は**電力**です。
直流の場合の電力は下記の式でした。
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流
実は交流の場合もこの式がそのまま適用出来ます。（説明略　成るから成る！　物理の法則）
交流の場合、電流が電圧に対して進んだり遅れたりします。
まずは、進みや遅れが無い場合について考えて見ましょう。（位相角θ＝0 度の場合です。）
瞬時電圧＝$\sqrt{2}$ＥSIN(ωt)[V]
瞬時電流＝$\sqrt{2}$ＩSIN(ωt)[A]
です。
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流ですから

$$=\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)\times\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t)$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{SIN}(\omega t)$$
$$③=2EI\frac{1}{2}\{1-\mathrm{COS}(2\omega t)\}$$
←③は適用公式番号を指す。以下同じ。
$$=EI\{1-\mathrm{COS}(2\omega t)\}$$

2ωt はωt の２倍です。この様に、角速度が２倍になっているものを第２次高調波と言います。
COS(ωt)のグラフと COS(2ωt)のグラフを並べて書いてみると、違いが良く解ります。下図参照。
お互いにコサイン関数ですから、波高値は変わりません。サイクル（周期）が変わります。

図８

ー：基本波　　　COS(ωt)
ー：第２次高調波　COS(2ωt)



鹿の骨印

では、この瞬時電力の式をグラフにして見ましょう。
瞬時電力＝ＥＩ{１－COS(2ωt)}ですが、この式を２つに分けて、
瞬時電力＝瞬時電力その１＋瞬時電力その２
瞬時電力その１＝ＥＩ　→　図９になります。
瞬時電力その２＝－ＥＩCOS(2ωt)　→　図１０になります。
とします。
瞬時電力その１のグラフと、瞬時電力その２のグラフを書いて、合算すれば瞬時電力のグラフが書けます。

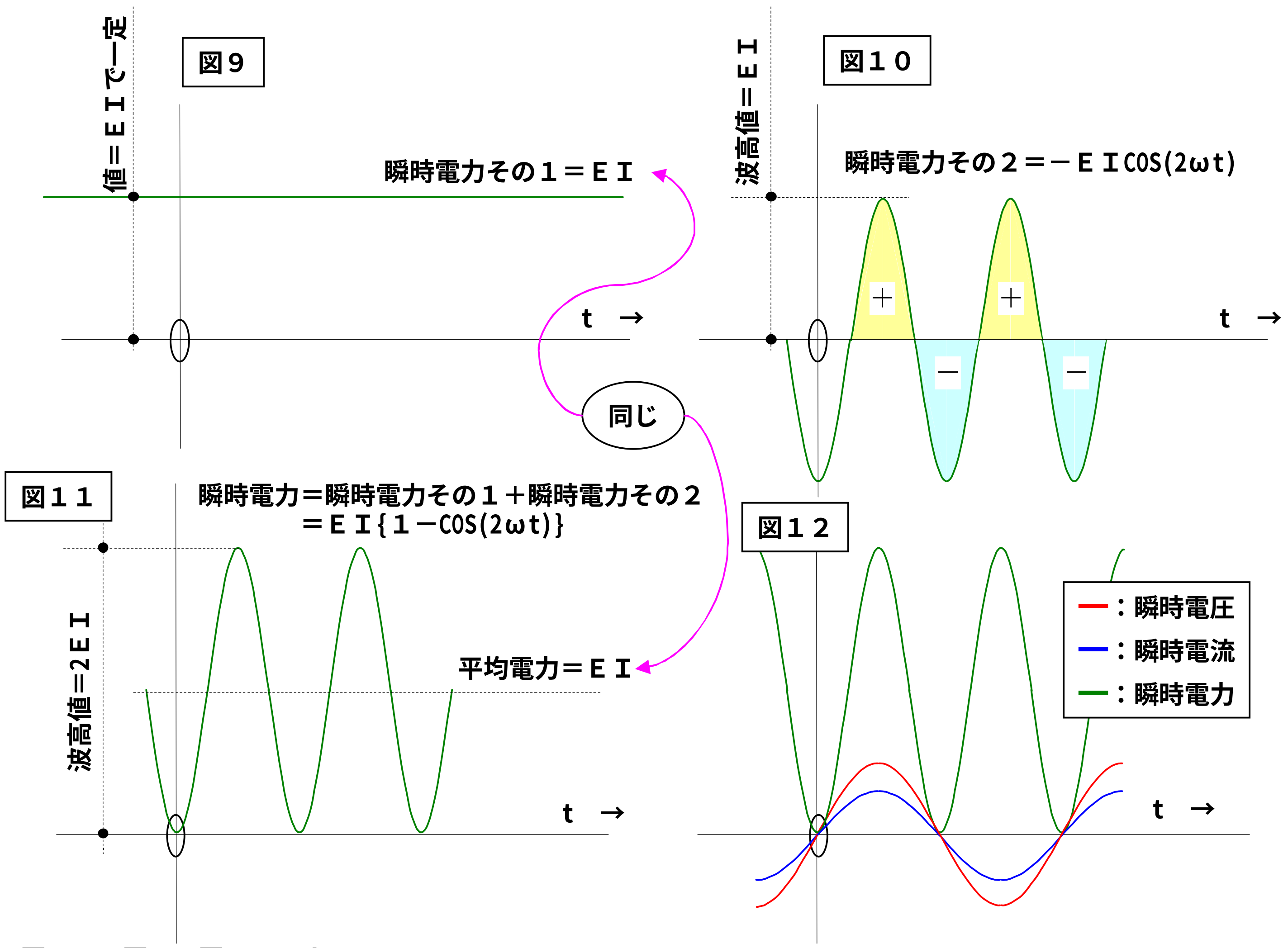


図１１＝図９＋図１０です。
図１２は電圧と電流と電力のグラフを全部書いたものです。

図１１の中に「平均電力」の値を書きましたがこれについて記載します。
図１０の平均電力は計算するまでもなく、ゼロになります。(図１０の□＋□＝0)
従って、図１１の平均電力は図９の値と同じものになります。
θ＝0 の場合の平均電力は＝ＥＩです。
この様にθ＝0 の時の瞬時電力は負値にならず、零から２倍値の間を商用周波数の２倍の周波数で揺らぎながらエネルギーを伝えている事が解ります。
一般的に有効電力とよばれる値はこの揺らいでいる電力の平均電力を指します。　<＝＝重要！

*********　ここで√2 のオマケの話です。　*********

交流電圧の波高値を√2Ｅ、交流電流の波高値を√2Ｉと書いた場合、Ｅ及びＩをそれぞれ、電圧の実効値、電流の実効値と言います。
実効値とは、「直流と同じと見なせる値」のことを言います。
直流の電力はＥＩでしたが、交流の場合もＥＩとならなければ、直流と同じと見なせません。
従って、実効値の√2 倍の波高値を持つ電圧と電流を持ってきます。
電圧＝ＥSIN(ωt)、電流＝ＩＥSIN(ωt)とすると平均電力＝ＥＩ/2 となってしまい、直流と同じ仕事をしません。
従って、電圧電流とも実効値の√2 倍の値を波高値とします。
通常 100[V]の電圧と言った場合、100[V]の値は実効値を示します。
波高値は 141[V]になります。
電流でも同じです。実効値 100[A]の波高値は 141[A]です。

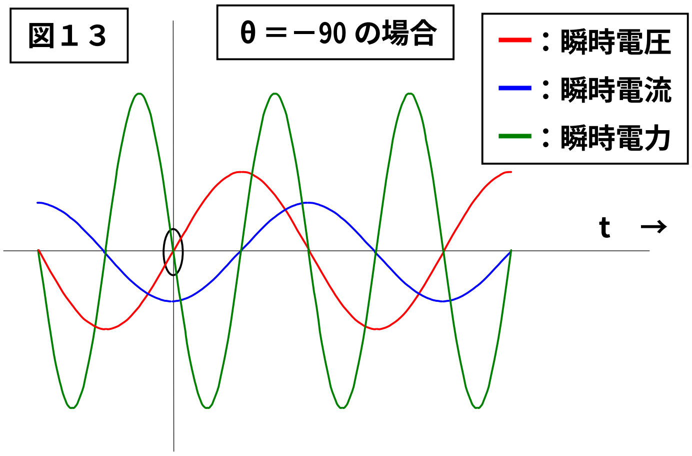
次は電圧と電流の位相がずれた場合です。

電圧と電流のズレ方は色々有ります。
一周回って３６０度ですから、１度の場合、２度の場合・・・３５９度の場合という風に３５９種類パターンを検討すれば全部のパターンを網羅したことになるのだと思いますが、そんな面倒くさい事は出来ません。

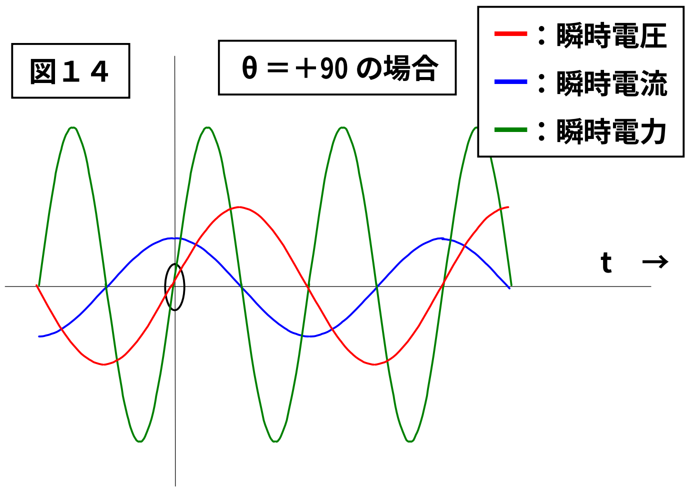
手始めに、**θ＝−90 度**の場合を検討します。
瞬時電圧＝$\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)$、瞬時電流＝$\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t-90)$となります。
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流

$$=\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)\times\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t-90)$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{SIN}(\omega t-90)$$
④$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\{\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(90)-\mathrm{COS}(\omega t)\mathrm{SIN}(90)\} \qquad \leftarrow \mathrm{COS}90=0$$
$$=-2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(\omega t)$$
⑤$$=-EI\,\mathrm{SIN}(2\omega t)$$

この関数のグラフを書いて見ましょう。下図（図１３）になります。



瞬時電力＝$-EI\,\mathrm{SIN}(2\omega t)$



瞬時電力＝$EI\,\mathrm{SIN}(2\omega t)$

同様に図１４は 90 度進んだ場合のグラフです。
瞬時電圧＝$\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)$、瞬時電流＝$\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t+90)$となります。
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流

$$=\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)\times\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t+90)$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{SIN}(\omega t+90)$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\{\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(90)+\mathrm{COS}(\omega t)\mathrm{SIN}(90)\}$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(\omega t)$$
$$=EI\,\mathrm{SIN}(2\omega t)$$

図１３及び図１４で共通で、瞬時電力の波高値はＥＩになります。
又、**平均電力は０になります。　＜＝＝重要！！**
つまり、電圧と電流の位相差が±90 度の場合は、電力を消費しない事になります。
瞬時電圧の周期を基準に記載しますと、1/4 サイクルの間はエネルギを消費し、次の 1/4 サイクルの間にエネルギを電源側に回生してます。
従って、この場合、「電力消費が零になる」と言う表現は的確ではなく、「**電力を往復させている。**」と言う言い方の方が実情に合います。
しかし、外部にエネルギは出てきませんので、電力消費は零と言います。

今度は一般値で θ 度ずれた場合を検討します。
（θ はプラス値もマイナス値もありますが　$-90 \leqq \theta \leqq 90$　とします。）
瞬時電流は下記の式で書けます。
瞬時電流$=\sqrt{2}\,\mathrm{SIN}(\omega t+\theta)$
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流

$$=\sqrt{2}E\,\mathrm{SIN}(\omega t)\times\sqrt{2}I\,\mathrm{SIN}(\omega t+\theta)$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{SIN}(\omega t+\theta)$$
$$④=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\times\{\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(\theta)+\mathrm{COS}(\omega t)\mathrm{SIN}(\theta)\}$$
$$=2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(\theta)+2EI\,\mathrm{SIN}(\omega t)\mathrm{COS}(\omega t)\mathrm{SIN}(\theta)$$
$$③⑤=EI\{1-\mathrm{COS}(2\omega t)\}\mathrm{COS}(\theta)+EI\,\mathrm{SIN}(2\omega t)\mathrm{SIN}(\theta)$$
$$=EI\,\mathrm{COS}(\theta)-EI\{\mathrm{COS}(2\omega t)\mathrm{COS}(\theta)-\mathrm{SIN}(2\omega t)\mathrm{SIN}(\theta)\}$$
$$⑥=EI\,\mathrm{COS}(\theta)-EI\,\mathrm{COS}(2\omega t+\theta)$$

この式をよく見ると、次のように書けます。
＝平均値が固定値になる関数＋平均値がゼロになる関数
第一項の$EI\,\mathrm{COS}(\theta)$はE＝固定値、I＝固定値、$\mathrm{COS}\theta$もθが固定値だから固定値となります。
第二項の$EI\,\mathrm{COS}(2\omega t+\theta)$は固定値×固定値×COS 関数となっていますので、平均値はゼロになります。
従って、この式の平均値は
瞬間電力の平均値$=EI\,\mathrm{COS}(\theta)$
となり一定値になります。

この値は有効電力＝電圧の実効値×電流の実効値×力率(＝位相角のCOS値＝$\mathrm{COS}\theta$)になる事の証明なのですが、この式のままですと「無効電力」の解析が何処かへ飛んでしまいます。
さて困った・・・・もう一度計算をやり直してみましょう。
途中式は同じですから多少省略します。

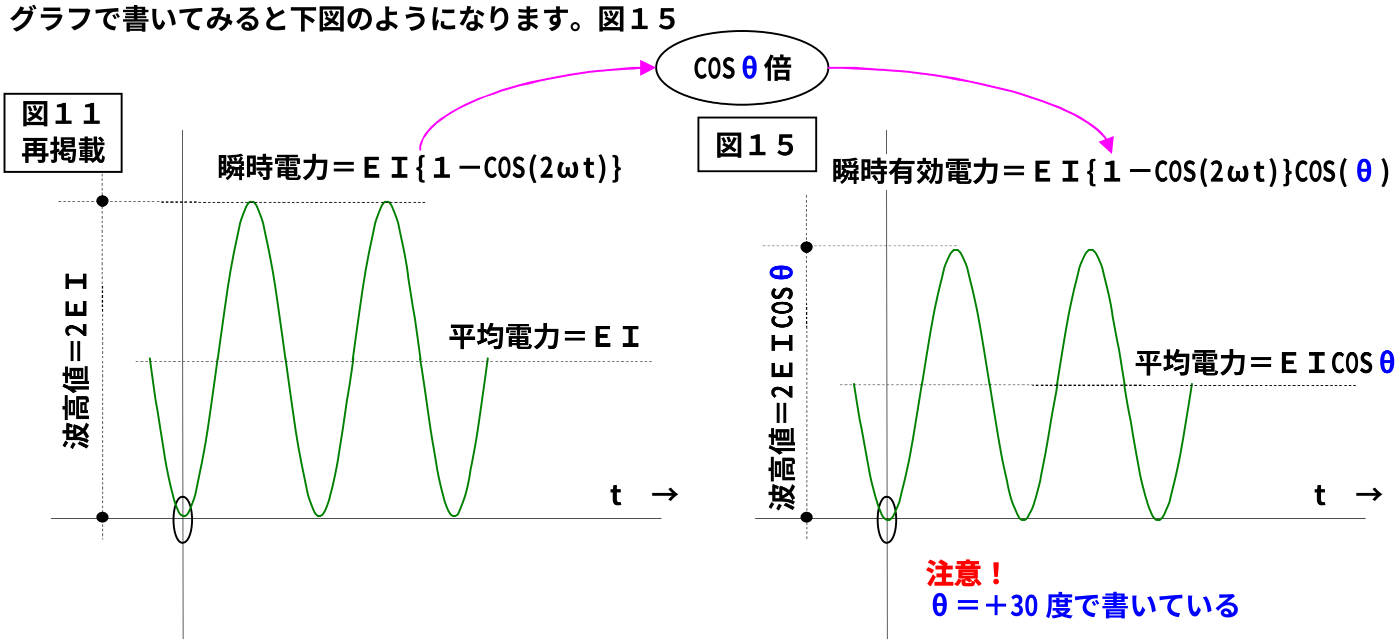
瞬時電力＝瞬時電圧×瞬時電流

$$=EI\,\mathrm{COS}(\theta)-EI\{\mathrm{COS}(2\omega t)\mathrm{COS}(\theta)-\mathrm{SIN}(2\omega t)\mathrm{SIN}(\theta)\}$$
$$=EI\{1-\mathrm{COS}(2\omega t)\}\mathrm{COS}(\theta)+EI\{\mathrm{SIN}(2\omega t)\}\mathrm{SIN}(\theta)$$

この式を第一項と第二項に分離して観察すると次のようになります。

第一項の式$=EI\{1-\mathrm{COS}(2\omega t)\}\mathrm{COS}(\theta)$
第二項の式$=EI\{\mathrm{SIN}(2\omega t)\}\mathrm{SIN}(\theta)$

第一項の式って見覚え有りませんか？
実はこの式は４ページの式に$\mathrm{COS}\theta$をかけ算した式になっています。（４ページの式の図は図１１）
グラフで書いてみると下図のようになります。図１５



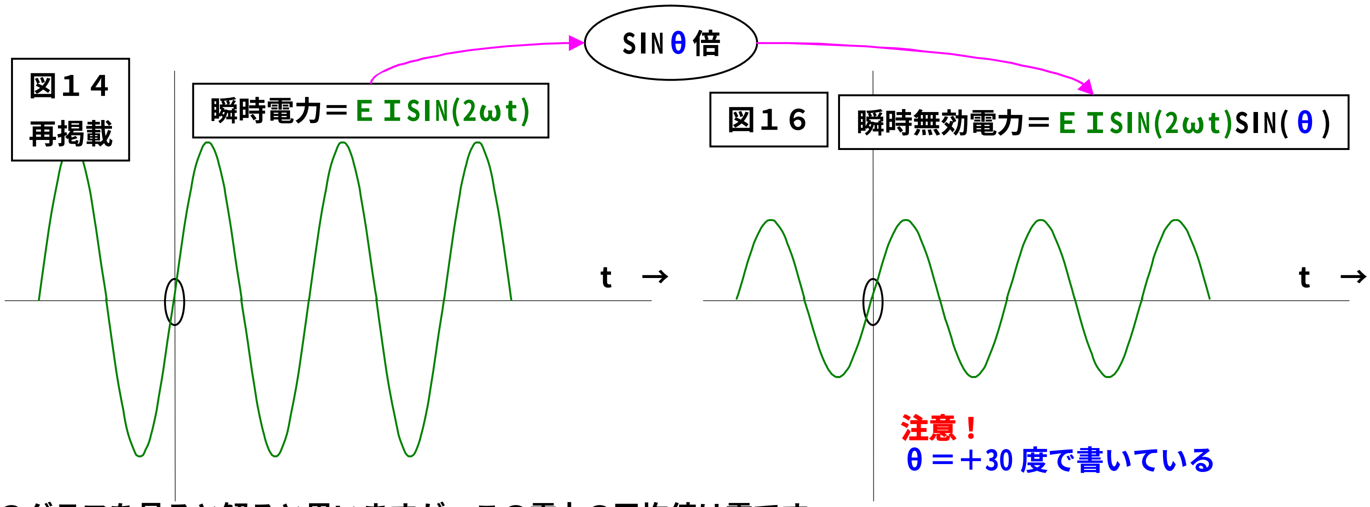
この様に第一項の式は$\theta=0$の時の式の $\mathrm{COS}\theta$ 倍の式になっています。
図１１同様図１５でもこの式の値は負値にならず、零から２培値の間を商用周波数の２倍の周波数で揺らぎながらエネルギーを伝えている事が解ります。
これが有効電力と言う概念の姿です。　**<＝＝重要！！**

次ページで第２項の式を検討します。

有効電力の次は無効電力になるだろう・・・と言う事で早速検討して見ましょう。

第二項の式＝ＥＩ{SIN(2ωt)}SIN(θ)

ＥＩ{SIN(2ωt)}って何の式でしたっけ？
実は５ページの図１４の式と同じです。
この式を SIN(θ)倍したものが第二項の式です。両方のグラフを見比べてみましょう。



このグラフを見ると解ると思いますが、この電力の平均値は零です。
つまり電力は出てきません。
これが無効電力と言う概念の姿です。　<==重要！！

有効電力、無効電力と来れば今度は皮相電力です。
瞬時電力の式をこねくり回して、図１５と図１６のグラフを得ましたので、両方を合算したものを作ってみましょう。

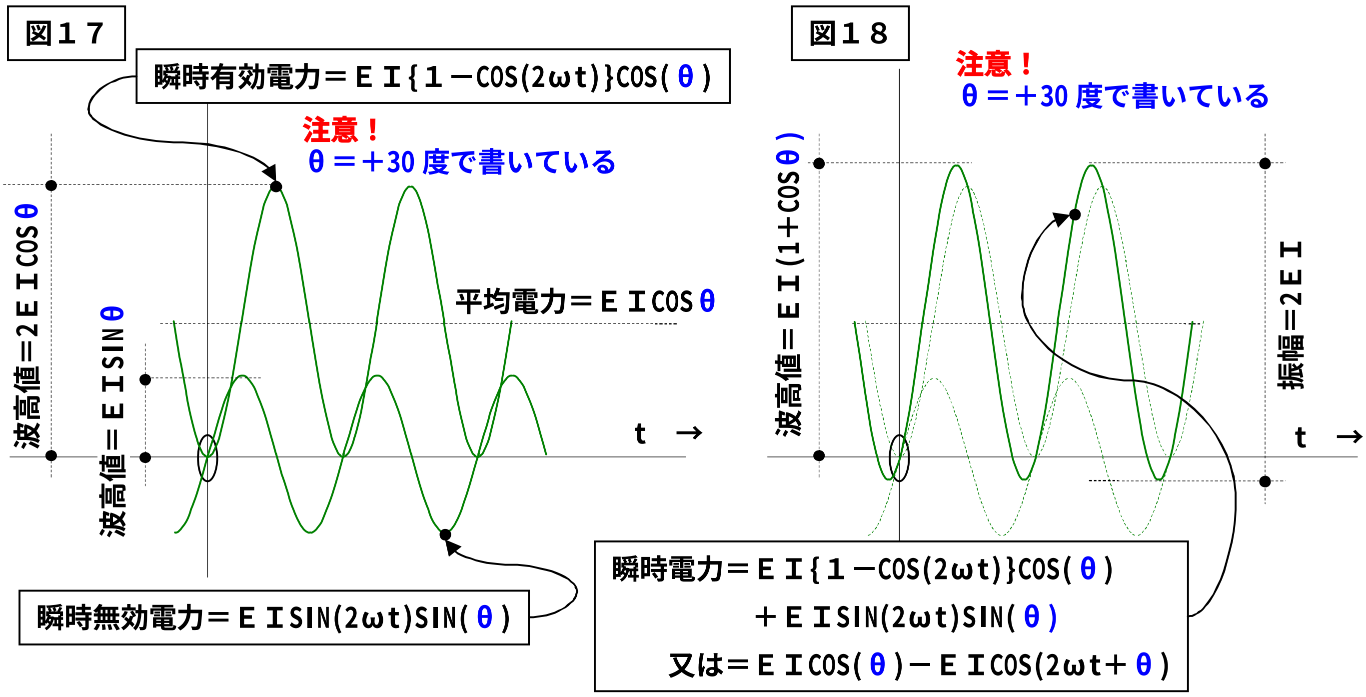
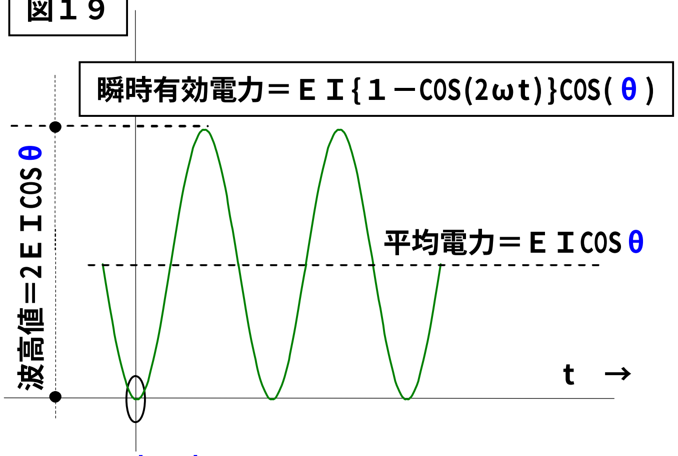


図１７は有効電力と無効電力をそのままグラフに並べたものです。
両グラフを足し算すると図１８になります。
図１８のグラフの最大値はＥＩの(1+COSθ)倍になり皮相電力の２倍の 2ＥＩにはなりませんが、
振幅が 2ＥＩになり皮相電力を示します。
瞬時電力＝ＥＩCOS(θ)－ＥＩCOS(2ωt+θ)となりますが、－ＥＩCOS(2ωt+θ)の値は COS(2ωt+θ)＝－１の時に最大になり、最大値＝ＥＩCOS(θ)＋ＥＩ＝ＥＩ(1+COSθ)となります。
従って波高値はＥＩ(1+COSθ)です。
最小値は COS(2ωt+θ)＝＋１の時に－ＥＩCOS(2ωt+θ)の値が最小で－ＥＩとなり、最小値＝ＥＩCOS(θ)－ＥＩと成ります。
従って振幅はＥＩCOS(θ)+ＥＩ－｛ＥＩCOS(θ)－ＥＩ｝＝2ＥＩとなり、皮相電力の２倍値になります。

図１８まではθ＝＋30 度で書いて来ました。
下記は一般的に多い遅れ力率の場合でθ＝－30 度の場合を書きます。

図１９



θ＝－30 度で書いている。
COS＋30＝COS－30 なので図１５と同じものになる。

図２０

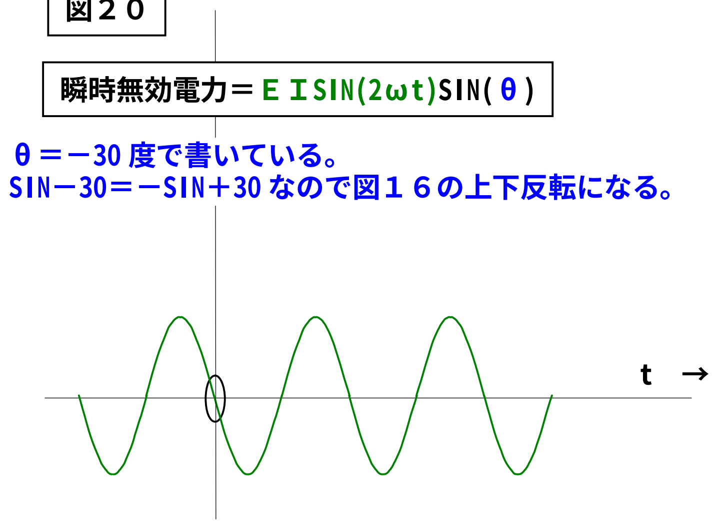


図２１

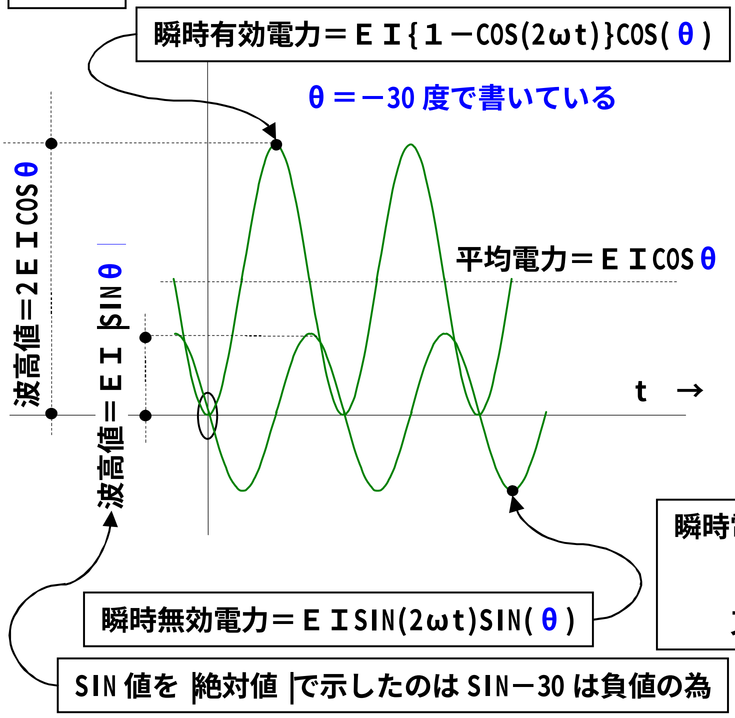
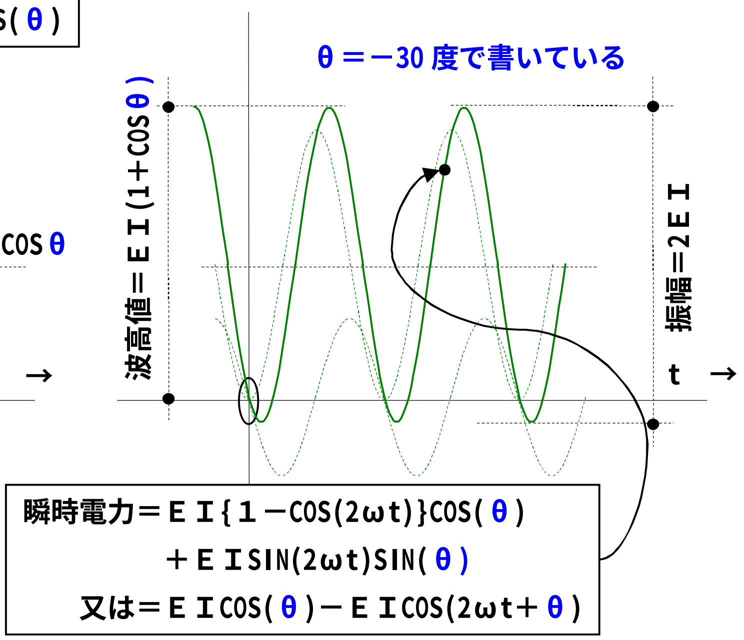


図２２



この様に電力を瞬時瞬時で捉えると相当にややこしい話になることが解ります。
こんな検討を実務でイチイチやっていられませんので、ベクトルを用いた計算方法が考案されて、小生を含め皆さんも普段使っているわけです。
大概の場合、数学は高等になるに従って理論は難しくなるのですが応用は簡単になります。
上記のようなグラフを書いて電力を計算するよりベクトルを用いて計算する方が１００倍以上楽です。
ベクトル計算法を考案した方に感謝しましょう。

前ページで行数の都合で書けなかった事を書きます。
振幅は 2ＥＩとなり、皮相電力ＥＩの２倍値になります。　<==　重要！

オシマイ

鹿の骨印

ここではθを色々変化させた場合を一覧で示します。
θ＝−90,−60,−30,±0,＋30,＋60,＋90 の場合です。
いずれの場合も皮相電力の振幅は変化しない事を確認して下さい。
|電圧|=一定、 |電流|=一定で書いています。

凡例
- 瞬時電力（皮相電力）
- 瞬時有効電力
- 瞬時無効電力
- 瞬時電圧
- 瞬時電流

この一連のグラフはパソコンに書かせたものです。

図２３　θ＝−90

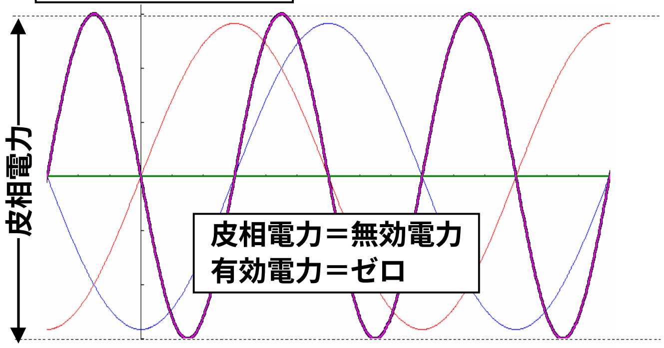


図２４　θ＝−60

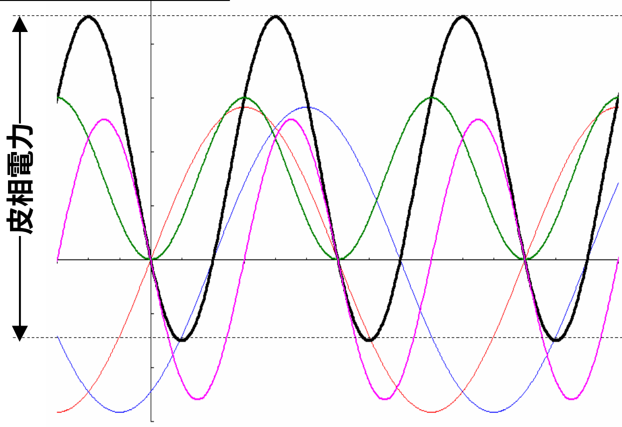


図２５　θ＝−30

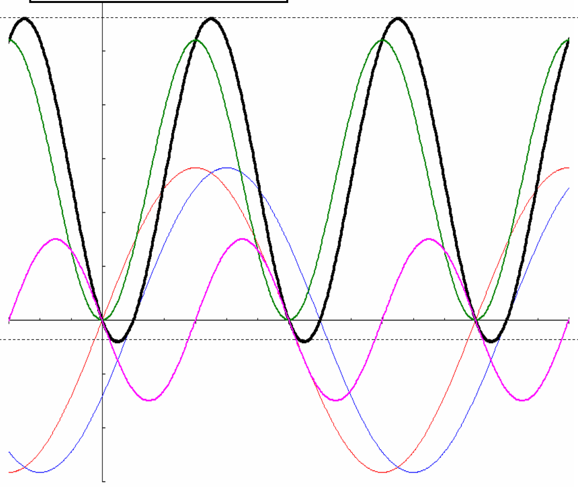


図２６　θ＝±0

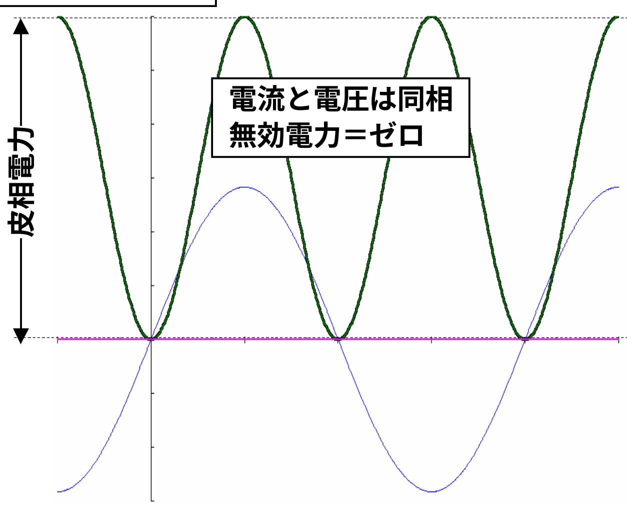


図２７　θ＝＋30

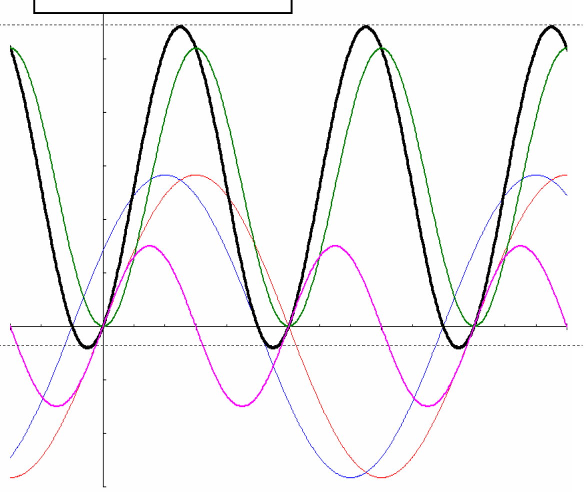


図２８　θ＝＋60

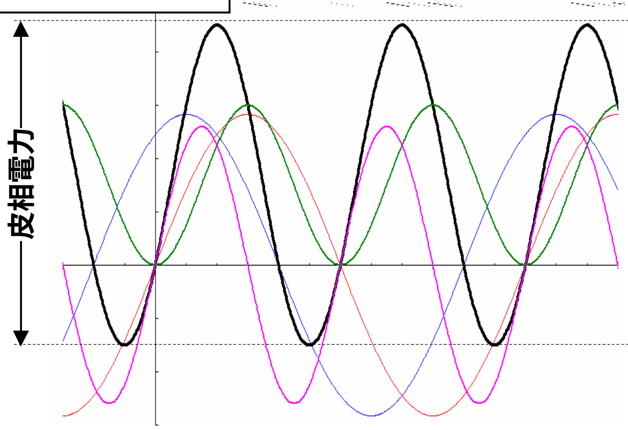


図２９　θ＝＋90